

Tentamen Programmacorrectheid, 24 augustus 2007

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Werk netjes, formuleer scherp en zorgvuldig. Schrijf duidelijk leesbaar.

Geef in alle gevallen volledige en volledig correcte annotaties.

Opgave 1 (15 %). Bepaal een geannoteerd commando S dat voldoet aan

```
const n : ℤ
var k : ℤ
  { P : k = X }
S
  { Q : k ≤ n ∧ (k = X + 1 ∨ k = 2 · n - X) } .
```

Opgave 2 (40 %). Er is een groep personen met de nummers $0 ≤ i ≤ n$. Gegeven is een afhankelijkheidsrelatie $a(i, j)$ tussen de personen, die transitief is, dwz. als persoon i afhankelijk is van persoon j en j is afhankelijk van k , dan is i afhankelijk van k (dus $a(i, j) ∧ a(j, k) ⇒ a(i, k)$). Gegeven is tevens dat persoon 0 *niet* afhankelijk is van persoon n (dus $¬a(0, n)$). Verder is $0 < n ≤ 2^r$.

Ontwerp een geannoteerd commando S ter bepaling van een persoon die *niet* afhankelijk is van zijn rechter buurman, dus met een nummer p waarvoor geldt $¬a(p, p + 1)$, dus volgens de specificatie:

```
const n, r ∈ ℕ
  { P : ¬a(0, n) ∧ 0 < n ≤ 2^r ∧ (∀ i, j, k : a(i, j) ∧ a(j, k) ⇒ a(i, k)) }
var p : ℤ
S
  { Q : ¬a(p, p + 1) } .
```

Commando S dient in ten hoogste r stappen te termineren. Voer het volledige stappenplan uit. Laat tevens zien, dat je commando S inderdaad in ten hoogste r stappen termineert.

Opgave 3 (45 %). Gegeven is een functie $h : ℕ^2 → ℤ$ die sterk dalend in zijn eerste argument en zwak stijgend in zijn tweede argument is. Bepaal een commando S ter bepaling van het aantal paren (i, j) met $i + j ≤ m$ en $h(i, j) = c$ voor gegeven getallen c en m , volgens de specificatie

```
const m : ℕ, c : ℤ
var z : ℤ
  { P : Z = #{(i, j) ∈ ℕ^2 | i + j ≤ m ∧ h(i, j) = c} }
S
  { Q : Z = z } .
```

(a: 25 %) Maak een schets van het te onderzoeken gebied. Geef aan waar berg en dal liggen, hoe de hoogtelijn loopt, en waar je de resterende rechthoek of driehoek legt. Definieer een functie waar Z mee berekend kan worden. Bepaal recurrente betrekkingen voor deze functie.

(b: 20 %) Bepaal een commando S dat aan bovenstaande specificatie voldoet. Voer hiertoe het volledige stappenplan uit.